Bài giảng số 10

NHỊ THỨC NEWTON

Các bài toán tổ hợp nói chung và nhị thức Newton nói riêng là một trong các cấu thành của các đề thi môn Toán trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng những năm gần đây từ 2002-2009.

Bài giảng này dành để trình bày các phương pháp giải các bài toán liên quan đến nhị thức Newton. Có hai loại bài toán chính được xét đến ở đây:

- Các bài toán liên quan đến hệ số trong khai triển nhị thức Newton.
- Các bài toán tính tổng có sử dụng đến nhị thức Newton.

§1. CÁC BÀI TOÁN VỀ HỆ SỐ TRONG KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON

Như đã biết nhị thức Newton có dạng:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-b} b^k . (1)$$

Trong đó vế phải của (1) là tổng n+1 số hạng. Số $C_n^k a^{n-b} b^k$ là số hạng thứ k+1 của tổng ấy, ($k = 0,1,2,\ldots,n$). Các bài toán thuộc chủ đề này là một dạng toán hay gặp trong các kì thi tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng trong những năm gần đây. Nó thường có dạng sau: "Tìm điều kiện để hệ số của khai triển (1) thỏa mãn một điều kiện nào đấy".

Phương pháp giải các bài toán này thường được tiến hành như sau:

- Viết khai triển Newton (1) với a, b được chọn từ đầu bài. Trong một số trường hợp có thể phải xác định số n trước (thường n là nghiệm của một phương trình có liên quan đến số tổ hợp).
- Từ (1) sử dụng số hạng thứ k+1: $C_n^k a^{n-b} b^k$ của khai triển và yêu cầu đề bài để thiết lập nên một phương trình (mà ẩn của nó thường là k).
- Từ nghiệm tìm được sẽ cho ta kết quả cần tìm.

Trong quá trình giải toán ta thường dùng các kết quả đặc biệt sau:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n .$$

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^k = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n x^n .$$

Đặc biệt hơn, ta có: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0 .$$

Các dạng toán cơ bản:

Loại 1: Tìm hệ số của x^k trong một khai triển nhị thức Newton:

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2007)

Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển nhị thức $(2+x)^n$ biết rằng:

$$3^n C_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 - 3^{n-3}C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n = 2048.$$

Giải

Áp dụng công thức khai triển nhị thức Newton:

$$2^n = (3-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k (-1)^{n-k}$$

$$= 3^n C_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 - 3^{n-3}C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n.$$

Vì thế, từ giả thiết ta có: $2^n = 2048 = 2^{11} \Rightarrow n = 11$.

Lại áp dụng công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$(2+x)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k 2^k x^{11-k} . (1)$$

Từ (1) suy ra hệ số của x^{10} ứng với k= 1, và đó là số : $C_{11}^1 2^1 = 22$.

Nhận xét:

Thí dụ trên là một minh họa đầy đủ cho phương pháp giải mà chúng ta đã trình bày trong phần mở đầu.

Thí dụ 2:(Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2006)

Tìm hệ số của số hạng x^{26} trong khai triển nhị thức Newton của

$$\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n.$$

Biết rằng $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$.

Giải

Trước hết xác định n từ giả thiết đã cho như sau:

Theo tính chất của số tổ hợp, ta có:

$$C_{2n+1}^1 = C_{2n+1}^{2n}$$

$$C_{2n+1}^2 = C_{2n+1}^{2n-1}$$

$$............$$

$$C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1}.$$

Từ đó ta có: $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n-1} + ... + C_{2n+1}^{n+1}$ (1)

Từ (1) ta có:

$$C_{2n+1}^0 + \left(C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n\right) + \left(C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n-1} + ... + C_{2n+1}^{n+1}\right) + C_{2n+1}^{2n+1}$$

$$= 2 + 2\left(C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n\right) \quad (2)$$

Vì vế trái của (2) bằng 2, nên từ (2) và giả thiết ta có:

$$2^{2n+1} = 2 + 2\left(2^{20} - 1\right) = 2^{21} \Leftrightarrow n=10.$$

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^{10}=\left(x^{-4}+x^7\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\left(x^{-4}\right)^k\left(x^7\right)^{10-k}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k x^{70-11k}.$$

Ta có $70-11k=26 \Rightarrow k=4$. Vậy số hạng chứa x^{26} ứng với $k=4$. Từ đó suy ra hệ số của x^{26} là $C_{10}^4=210$.

Nhận xét: Một lần nữa ta thấy các bước giải của các loại toán trong mục này tuân theo phương pháp đã trình bày trong phần mở đầu.

Thí dụ 3 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2004)

Tìm các số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$, với $x>0$.

<u>Giải</u>

Ta có: $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7=\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{-1}{4}}\right)^7=\sum_{k=0}^{7}C_7^k\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^k\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^{7-k}$

$$=\sum_{k=0}^{7}C_7^k x^{\frac{k}{3}+\frac{k-7}{4}}=\sum_{k=0}^{7}C_7^k x^{\frac{7k-21}{12}}$$

Xét phương trình $7k-21=0 \Leftrightarrow k=3$.

Vậy số hạng không chứa x là số hạng ứng với $k=3$. Đó là số $C_7^3=35$.

Chú ý: Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A, B – 2008 có dạng tương tự: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2x+\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^7$.

Đáp số: 6528.

Thí dụ 4: (Đề thi Đại học khối A – 2003)

Tìm hệ số của só hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Newton $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n$, biết rằng: $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^n=7(n+3)$.

<u>Giải</u>

Trước hết ta tìm n từ hệ thức:

$$C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^n=7(n+3)\Leftrightarrow C_{n+3}^{n+1}+C_{n+3}^n-C_{n+3}^n=7(n+3)\Leftrightarrow\frac{(n+3)!}{(n+1)!2!}=7(n+3)$$

$$\Leftrightarrow (n+2)(n+3)=14(n+3)\Leftrightarrow (n+2)=14 \Leftrightarrow n=12 \text{ (do } n+3>0)$$

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^{12}=\left(x^{-3}+x^{\frac{5}{2}}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k\left(x^{-3}\right)^k\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{12-k}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k x^{\frac{60-11k}{2}}$$

Từ phương trình $\frac{60-11k}{2}=8 \Rightarrow k=4$.

Vậy số hạng chứa x^8 trong khai triển tương ứng với k = 4, do đó hệ số của nó là $C_{12}^4 = 495$.

Nhận xét: Với các thí dụ 1, 2, 3, 4 việc tính hệ số của các số hạng chứa x^k được tính trực tiếp.

Trong các thí dụ sau đây, việc tính hệ số của số hạng x^k không tính được trực tiếp mà nó phải qua bước trung gian. Ta hãy xét các thí dụ đó:

Thí dụ 5: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2007)

Tìm hệ số của x^5 trong khai triển của biểu thức: $P = x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$.

Giải

Theo công thức khai triển nhị thức Newton, ta có:

$$P = x\sum_{k=0}^{5} C_5^k(-2x)^k + x^2\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k(3x)^k. \quad (1)$$

Từ (1) suy ra số hạng chứa x^5 của P là:

$$xC_5^4(-2x)^4 + x^2C_{10}^3(3x)^3 = x^5\left(16C_5^4 + 27C_{10}^3\right).$$

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển là 16.5+27.120 = 3320.

Thí dụ 6 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2004)

Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của biểu thức:

$$P = \left[1 + x^2(1-x)\right]^8.$$

Giải

Theo công thức khai triển Newton ta có:

$$P = \sum_{k=0}^{8} C_8^k\left[x^2(1-x)\right]^k = \sum_{k=0}^{8} C_8^k x^{2k}(1-x)^k.$$

+ Với k = 5, 6, 7, 8 thì $x^{2k}(1-x)^k$ chứa lũy thừa bậc thấp nhất là $2k \geq 10$, vậy mọi số hạng của nó không có số hạng nào chứa lũy thừa 8 của x.

+ Với k = 0, 1, 2 thì $x^{2k}(1-x)^k$ chứa lũy thừa bậc cao nhất là $3k \leq 6$, vậy mọi số hạng của nó không có số hạng nào chứa lũy thừa 8 của x.

Vậy chỉ xét khi k=3, k=4.

- Với k = 3, xét số hạng $C_8^3x^6\left(1-x^3\right) = C_8^3x^6\left(1-3x+3x^2-x^3\right)$.

Số hạng chứa x^8 ở đây là $3C_8^3x^8$.

- Với k = 4 xét số hạng: $C_8^3x^8\left(1-x^4\right)$. Số hạng chứa x^8 là: $C_8^4x^8$.

Vậy hệ số chứa lũy thừa x^8 trong khai triển của P là: $3C_8^4C_8^3 = 238$.

Thí dụ 7:

Cho đa thức $P(x) = (1 + x) + 2(1 + x)^2 + 3(1 + x)^3 + \ldots + 20(1 + x)^{20}$. Tìm hệ số của số hạng x^{15} trong khai triển thành đa thức của P(x).

Giải

Viết lại:

$$P(x) = \left[(1+x) + 2(1+x)^2 + \ldots + 14(1+x)^{14}\right]$$

$$+15\left(\sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^k\right)+16\left(\sum_{k=0}^{16} C_{16}^k x^k\right)+\ldots+20\left(\sum_{k=0}^{20} C_{20}^k x^k\right). \quad (1)$$

Từ đó suy ra hệ số của số hạng chứa x^{15} là

$$a_{15} = 15C_{15}^{15} + 16C_{16}^{15} + 17C_{17}^{15} + 18C_{18}^{15} + 19C_{19}^{15} + 20C_{20}^{15} = 400995.$$

Loại 2: Tìm hệ số lớn nhất trong một khai triển nhị thức Newton:

Bài toán này có dạng sau: Trong một khai triển thành đa thức.

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

(ở đây sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton). Hãy tìm hệ số lớn nhất trong các hệ số $a_0, a_1, \ldots, a_n$

Phương pháp giải loại toán này như sau:

- Xét bất phương trình $a_k < a_{k+1}$ và nghiệm của nó thường có dạng $k < k_0$ do k nguyên nên $k = 0, 1, 2, \ldots, k_0-1$.
- Từ đó suy ra bất phương trình $a_k \geq a_{k+1}$ có nghiệm dạng $k \geq k_0$.

Đến đây ta có hai khả năng:

+ Nếu $a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = k_0$.

Khi đó ta có: $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{k_0} = a_{k_0+1} > a_{k_0+2} > \ldots > a_{n-1} > a_n$.

Lúc này có hai hệ số nhận giá trị lớn nhất là a_{k_0} và a_{k_0+1}

+ Nếu $a_k = a_{k+1}$ vô nghiệm

Khi đó ta có: $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots a_{k_0-1} < a_{k_0} < a_{k_0+1} > \ldots > a_n$.

Lúc này có duy nhất hệ số a_{k_0} nhận giá trị lớn nhất.

Thí dụ 1 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2008)

Giả sử $P(x) = (1 + 2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ thỏa mãn hệ thức:

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a^n}{2^n} = 2^{12}.$$

Tìm hệ số lớn nhất trong các hệ số $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Giải

Theo công thức khai triển Newton ta có:

$$P(x) = (1+2x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k x^k = C_n^0 + 2C_n^1 x + 2^2 C_n^2 x^2 + \ldots + 2^n C_n^n x^n.$$

Từ đó do $P(x) = (1 + 2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, ta có:

$$a_0 = C_n^0$$

$$a_1 = 2C_n^1 \Rightarrow \frac{a_1}{2} = C_n^1$$

$$a_2 = 2C_n^2 \Rightarrow \frac{a_2}{2^2} = C_n^2$$

$$a_n = 2^n C_n^n \Rightarrow \frac{a_n}{2^n} = C_n^n$$

Vì thế: $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n} = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Do đó từ giả thiết suy ra: $2^n = 2^{12} \Rightarrow n = 12$.

Xét khai triển: $\quad (1+2x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 2^k x^k$.

Từ đó $\quad a_k = C_{12}^k 2^k$ (k=0, 1,...,12)

Xét bất phương trình: $\quad a_k < a_{k+1}$

$$\Leftrightarrow C_{12}^k 2^k < C_{12}^{k+1} 2^{k+1} \Leftrightarrow \frac{12!}{(12-k)!k!} < 2\frac{12!}{(11-k)!(k+1)!} \Leftrightarrow \frac{1}{12-k} < 2\frac{2}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow k+1 < 24 - 2k \Leftrightarrow k < \frac{23}{3} \Leftrightarrow k = 0, 1, 2, \ldots, 7 \text{ (do k nguyên).}$$

Từ đó suy ra: $a_k > a_{k+1} \Leftrightarrow k > \frac{23}{3} \Leftrightarrow k = 8, 9, 10, 11$.

Phương trình $a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = \frac{23}{7}$.

$\Leftrightarrow$ vô nghiệm do k nguyên.

Như thế ta có: $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_7 < a_8 > a_9 > a_{10} > a_{11} > a_{12}$.

Vậy max $\{a_0, a_1; \ldots; a_{12}\} = a_8 = 2^8 C_{12}^8 = 126720$.

Thí dụ 2

Xét khai triển $(3x+2)^9 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_9x^9$. Tìm hệ số lớn nhất trong các hệ số $\{a_0; a_1; \ldots.a_9\}$.

<u>Giải</u>

Ta có: $(3x+2)^9 = \sum_{k=0}^{9} C_9^k (3x)^k 2^{9-k} = \sum_{k=0}^{9} 3^k 2^{9-k} C_9^k x^k$.

Vậy $a_k = 3^k 2^{9-k} C_9^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 9)$.

Xét bất phương trình: $a_k < a_{k+1}$

$$\Leftrightarrow 3^k 2^{9-k} C_9^k < 3^{k+1} 2^{8-k} C_9^{k+1} \Leftrightarrow 2\frac{9!}{k!(9-k)!} < 3\frac{9!}{(k+1)!(8-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{9-k} < \frac{3}{k+1} \Leftrightarrow k < 5 \Leftrightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ (do k nguyên).}$$

Vậy $a_k > a_{k+1} \Leftrightarrow k > 5 \Leftrightarrow k = 6, 7, 8$.

Mặt khác $a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = 5$.

Vì thế ta có: $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 = a_6 > a_7 > a_8 > a_9$.

Từ đó: $a_5 = a_6 = \max\{a_0; a_1; \ldots; a_9\} = 2C_9^5 = 252$.

Thí dụ 3

Xét khai triển $(x+2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. Tìm n để $\max\{a_0; a_1; \ldots a_n\} = a_{10}$.

<u>Giải</u>

Từ giả thiết $a_0 < a_1 < \ldots < a_9 < a_{10} > a_{11} > a_{12} > \ldots > a_n$.

Vậy ta có hệ: $\begin{cases} a_{10} > a_9 & (1) \\ a_{10} > a_{11} & (2) \end{cases}$

Theo khai triển nhị thức Newton, thì

$$\left(x+2\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k 2^{n-k}.$$

Vậy $a_k = C_n^k 2^{n-k}$ với $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Từ đó (1), (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} C_n^{10} 2^{n-10} > C_n^9 2^{n-9} \\ C_n^{10} 2^{n-10} > C_n^{11} 2^{n-11} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-10)!\,10!} > \dfrac{2n!}{(n-9)!\,9!} \\ \dfrac{2n!}{(n-10)!\,10!} > \dfrac{n!}{(n-11)!\,11!} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{10} > \dfrac{2}{n-9} \\ \dfrac{2}{n-10} > \dfrac{1}{11} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 29 < n < 32$

$\Leftrightarrow$ $n = 30$ hoặc $n = 31$.

Loại 3: Các bài toán tìm hệ số và các số hạng trong khai triển nhị thức Newton thỏa mãn các điều kiện cho trước:

Thí dụ 1 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2003)

Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2+2)^n + (x+2)^n$. Tìm n để có $a_{3n-3}=26n$.

<u>Giải</u>

Vì n nguyên dương nên $n \geq 1 \Rightarrow 3n-3 \geq 0$.

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$\left(1+x^2\right)^n = C_n^0 + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^4 + \ldots + C_n^n x^{2n}, \qquad (1)$$

$$\left(2+x\right)^2 = 2^n C_n^0 + 2^{n-1} C_n^1 x + 2^{n-2} C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n. \ (2)$$

1/ Nếu $n = 1 \Rightarrow 3n-3 = 0$.

Trong trường hợp này, ta có: $\left(x^2+1\right)^n \left(x+2\right)^n = \left(x^2+1\right)\left(x+2\right)$

Từ đó suy ra $a_0 = 2$. Mặt khác $26n = 26 \Rightarrow a_{3n-3} \neq 26n$.

Loại khả năng này.

2/ Nếu n = 2 (lập luận tương tự như trường hợp 1 cũng loại khả năng này).

3/ Nếu $n \geq 3$, từ (1) (2) suy ra:

$$a_{3n-3} = C_n^n\left(2^3 C_n^{n-3}\right) + C_n^{n-1}\left(2C_n^{n-1}\right) = 2^3 \frac{n!}{(n-3)!3!} + 2n^2.$$

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{4n(n-1)(n-2)}{3} + 2n^2 = 26n \Leftrightarrow n = 5 \text{ (do } n \geq 3).$$

Vậy n = 5 là giá trị duy nhất cần tìm của n.

Thí dụ 2:

Tìm các số hạng nguyên trong khai triển $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^9$.

Giải

Theo công thức khai triển nhị thức Newton, ta có:

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^9=\left(3^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{3}}\right)^9=\sum_{k=0}^{9}C_9^k3^{\frac{k}{2}}2^{\frac{9-k}{3}}.\ (1)$$

Số hạng

$$C_9^k3^{\frac{k}{2}}2^{\frac{9-k}{3}} \text{ là nguyên } \Leftrightarrow \begin{cases}k\,\vdots\,2\\(9-k)\,\vdots\,3\\0\le k\le 9\end{cases} \Leftrightarrow k=0 \text{ và } k=6.$$

Vậy trong khai triển trên có hai số hạng nguyên đó là:

$$C_9^0 3^0 2^3=8 \text{ và } C_9^6 3^3 2^1=4536.$$

Thí dụ 2:

Trong khai triển nhị thức Newton:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21},$$

tìm hệ số của số hạng có số mũ của a và b là bằng nhau.

Giải

Theo công thức khai triển nhị thức Newton, ta có:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}=\left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{6}}\right)^{21}$$

$$=\sum_{k=0}^{21}C_{21}^k\left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}\right)^k\left(b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{6}}\right)^{21-k}=\sum_{k=0}^{21}C_{21}^k a^{\frac{k}{3}-\frac{21-k}{6}}b^{-\frac{k}{6}+\frac{21-k}{2}}. \quad (1)$$

Từ (1) suy ra xét hệ phương trình sau:

$$\frac{k}{3}-\frac{k-21}{6}=-\frac{k}{6}+\frac{21-k}{2} \Leftrightarrow k=12.$$

Vậy hệ số cần tìm là: $C_{21}^{12}=293930$ (đó là hệ số của số hạng chứa $a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{5}{2}}$)

Thí dụ 3

Tìm số nguyên dương bé nhất n sao cho trong khai triển $(1+x)^n$ có hai hệ số liên tiếp có tỉ số là $\frac{7}{5}$.

Giải

Ta có: $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k \Rightarrow$ hệ số của hai số hạng liên tiếp là: $C_n^k;C_n^{k+1}$.

Ta có:

$$\frac{C_n^k}{C_n^{k+1}}=\frac{7}{15}\Leftrightarrow\frac{k+1}{n-k}=\frac{7}{15}\Leftrightarrow 7n=22k+15\Leftrightarrow n=3k+2+\frac{k+1}{7}.$$

Do $n, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{k+1}{7}=t\Rightarrow k=7t-1\Rightarrow n=22t-1$ (1)

Do $k\geq 0$ nên $7t-1\geq 0\Rightarrow t\geq\frac{1}{7}$(2)

Từ (1) và (2) do t nguyên nên n nhận giá trị bé nhất bằng 21 khi t = 1. Vậy n = 21 là giá trị bé nhất của n thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

§2. CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH HỆ THỨC TỔ HỢP, HOẶC TÍNH TỔNG BẰNG CÁCH SỬ DỤNG NHỊ THỨC NEWTON

Để có thể giải các bài toán thuộc loại này, người ta thường giải nó theo các bước sau:

1/ Trước hết chọn một hàm số thích hợp với đầu bài. Các hàm số này thường là nhìn thấy ngay dạng của nó (dựa vào các biểu thức cho trong đầu bài).

2/ Dùng các phép biến đổi đại số, hoặc kết hợp với phép tính đạo hàm, tích phân để giải bài toán ban đầu.

Loại 1: Các bài toán kết hợp việc sử dụng phép tính đạo hàm và tích phân:

Với loại bài tập này, sau khi chọn được hàm số f(x) thích hợp ta tiến hành lấy đạo hàm (hoặc tích phân) hàm số đã chọn theo hai cách:

- Lấy đạo hàm (hoặc tích phân) trực tiếp hàm số đã cho.

- Lấy đạo hàm (hoặc tích phân) sau khi đã sử dụng khai triển nhị thức Newton hàm số f(x) đã chọn (dĩ nhiên ở đây f(x) có dạng có thể dùng công thức khai triển nhị thức Newton)

- Với phép lấy đạo hàm, ta lựa chọn một giá trị phù hợp cho x, rồi thay vào hai biểu thức và tính đạo hàm. Với phép lấy tích phân thì chọn hai cận tích phân thích hợp. Các giá trị này cũng thường thấy ngay từ đầu bài.

Thí dụ 1 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2007)

Cho n là số nguyên dương, chứng minh:

$$\frac{1}{2}C_{2n}^1+\frac{1}{4}C_{2n}^3+\frac{1}{6}C_{2n}^5+...+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}.$$

Giải

Ta có: $(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+C_{2n}^3x^3+...+C_{2n}^{2n}x^{2n}$ (1)

$(1-x)^{2n}=C_{2n}^0-C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2-C_{2n}^3x^3+...+C_{2n}^{2n}x^{2n}$.(2)

Xét hàm số: $f(x) = \dfrac{(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}}{2}$ (3)

Từ (1) (2) (3) suy ra: $f(x) = C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + C_{2n}^5 x^5 + ... + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1}$. (4)

Từ (3) ta có:

$$\int_0^1 f(x)dx = C_{2n}^1 \int_0^1 \frac{(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}}{2} dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(1-x)^{2n+1}}{2n+1}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}. \quad (5)$$

Từ (4) lại có: $\int_0^1 f(x)dx = C_{2n}^1 \int_0^1 xdx + C_{2n}^3 \int_0^1 x^3 dx + ... + C_{2n}^{2n-1} \int_0^1 x^{2n-1} dx$

$$= \frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + ... + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}. \quad (6)$$

Từ (5) (6) $\Rightarrow$ đpcm.

Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2005)

Tìm số nguyên dương n sao cho:

$$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2 C_{2n+1}^3 - 4.2^3 C_{2n+1}^4 + ... + (2n+1)2^{2n} C_{2n+1}^{2n+1} = 2005.$$

Giải

Xét hàm số: $f(x) = (1+x)^{2n+1} \Rightarrow f'(x) = (2n+1)(1+x)^{2n}$. (1)

Theo công thức khai triển nhị thức Newton, ta có:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k x^k = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 x + C_{2n+1}^2 x^2 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = C_{2n+1}^1 + 2C_{2n+1}^2 x + 3C_{2n+1}^3 x^2 + ... + (2n+1)C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n}. \quad (2)$$

Đồng thời thay x=–2 vào (1) và (2) ta có:

$$2n+1 = C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2 C_{2n+1}^3 - 4.2^3 C_{2n+1}^4 + ... + (2n+1)2^{2n} C_{2n+1}^{2n+1}. \quad (3)$$

Từ giả thiết và (3) suy ra 2n+1 = 2005 $\Leftrightarrow$ n = 1002.

Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2003)

Cho n là số nguyên dương. Tính tổng:

$$S = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + ... + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n.$$

Giải

Xét hàm số $f(x) = (1+x)^n$. Ta có:

$$I = -\int_{2\pi}^{0} (2\pi - t)(\cos^3 t)dt = \int_0^{2\pi} (2\pi - t)(\cos^3 t)dt. \quad (1)$$

Theo công thức khai triển Newton, ta có:

$$f(x) = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$$

$$\Rightarrow \int_1^2 f(x)dx = C_n^0\int_1^2 dx + C_n^1\int_1^2 xdx + C_n^2\int_1^2 x^2dx + ... + C_n^n\int_1^2 x^n dx$$

$$= C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + ... + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n. \quad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra đpcm.

Thí dụ 4

Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$C_{2n}^0 - 2C_{2n}^1 + 3C_{2n}^2 - 4C_{2n}^3 + ... + (2n+1)C_{2n}^{2n} = 0.$$

Giải

Xét hàm số $f(x) = x(1+x)^{2n}$.

$$f'(x) = (1+x)^{2n} + 2nx(1+x)^{2n-1} \quad (1)$$

Theo công thức khai triển nhị thức Newton, ta có:

$$f(x) = x\left(C_{2n}^0 + C_{2n}^1x + C_{2n}^2x^2 + ... + C_{2n}^{2n}x^{2n}\right) = C_{2n}^0x + C_{2n}^1x^2 + C_{2n}^2x^3 + ... + C_{2n}^{2n}x^{2n+1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = C_{2n}^0 + 2xC_{2n}^1 + 3x^2C_{2n}^2 + ... + (2n+1)C_{2n}^{2n}. \quad (2)$$

Đồng thời thay $x = -1$ vào (1) và (2) suy ra

$$C_{2n}^0 - 2C_{2n}^1 + 3C_{2n}^2 - 4C_{2n}^3 + ... + (2n+1)C_{2n}^{2n} = 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Thí dụ 5:

1/Tính $\int_0^1 x^2(1+x^3)^n dx$.

2/ Chứng minh:

$$\frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + ... + \frac{1}{3n+3}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{3n+3}.$$

Giải

1/ Ta có:

$$\int_0^1 x^2(1+x^3)^n dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (1+x^3)^n d(1+x^3) = \frac{2^{n+1}-1}{3n+3}. \ (1)$$

2/ Áp dụng khai triển nhị thức Newton ta có:

$$(1+x^3)^n = C_n^0 + C_n^1x^3 + C_n^2x^6 + C_n^3x^9 + ... + C_n^nx^{3n}$$

$$\Rightarrow x^2(1+x^3)^n = C_n^0x^2 + C_n^1x^5 + C_n^2x^8 + C_n^3x^{11} + ... + C_n^nx^{3n+2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2(1+3)^n dx = C_n^0\int_0^1 x^2dx + C_n^1\int_0^1 x^5dx + C_n^2\int_0^1 x^8dx + ... + C_n^n\int_0^1 x^{3n+2}dx$$

$$= \frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + ... + \frac{1}{3n+3}C_n^n. \ (2)$$

Từ (1) (2) suy ra đpcm.

Nhận xét:

Nếu bài ra chỉ có phần 2/ thì ta phải tự chọn hàm số: $f(x) = x^2(1 + x^3)^n$.
Nhưng điều này có thể hơi khó, vì vậy phần 1/ là sự gợi ý cho phần 2/.

Loại 2: Các bài toán sử dụng kết hợp với các biến đổi đại số ·

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2008)

Tìm n nguyên dương để có hệ thức sau:

$$C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} = 2048.$$

Giải

Xét hàm số $f(x) = (1+x)^{2n}$.

Ta có theo công thức khai triển nhị thức Newton

$$f(x) = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + C_{2n}^3 x^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n}.$$

Từ đó ta có:

$$f(1) = 2^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} \quad (2)$$

$$f(-1) = 0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} \quad (3)$$

Trừ từng vế (1) cho (2) ta đi đến $2^{2n} = 2\left(C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1}\right)$ (3)

Từ (3) và giả thiết suy ra $2^{2n-1} = 2048 = 2^{11}$.

$\Rightarrow n = 6$.

Chú ý: Một đề thi dễ hơn cùng loại trên (*Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2002)* có dạng:

Tìm n để có hệ thức: $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + ... + 2^n C_n^n = 243$.

Xét f(x) = $(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^n x^n$

$$\Rightarrow f(2) = 3^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + ... + 2^n C_n^n = 243 = 2^5 \Rightarrow n = 5.$$

Thí dụ 2:

Khai triển $(1 + x + x^2 + x^3)^5$ thành đa thức $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{15} x^{15}$.
Tính $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{15}$.

Giải

Đặt $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)^5 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{15} x^{15}$

$\Rightarrow f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{15} = 4^5 = 1024$.

Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A, B – 2005)

Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, ta có:

$$C_{2n}^n = \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2.$$

Giải

Xét f(x)=$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$.

Ta có:

$$f^2(x) = (1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + ... + \left(C_{2n}^n x^n\right) + ... + C_{2n}^{2n} x^{2n}. \ (1)$$

Mặt khác $f^2(x) = (1+x)^n (1+x)^n$

$$= \left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n\right)\left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n\right). \ (2)$$

Hệ số của x^n ở vế phải của (1) là C_{2n}^n.

Hệ số của x^n ở vế phải của (2) (dựa vào phép nhân hai đa thức) là:

$$C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + C_n^2 C_n^{n-2} + ... + C_n^{n-1} C_n^1 + C_n^n C_n^0 = \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2.$$

Từ đó suy ra đpcm.

Thí dụ 4:

Chứng minh rằng trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{23}$ tổng các hệ số của các lũy thừa bậc nguyên dương của x là số chính phương.

<u>**Giải**</u>

Theo công thức khai triển Newton, ta có:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{23} = \sum_{k=0}^{23} C_{23}^k x^k \left(\frac{1}{x}\right)^{23-k} = \sum_{k=0}^{23} C_{23}^k x^{2k-23}.$$

Xét bất phương trình: $2k - 23 > 0 \Leftrightarrow k > \frac{23}{2} \Leftrightarrow k = 12, 13, ..., 23$ (do k nguyên dương).

Vậy các lũy thừa bậc nguyên dương của x ứng với k = 12, 13,..., 23. Do đó tổng các hệ số lũy thừa bậc nguyên dương của x là:

$$C_{23}^{12} + C_{23}^{12} + ... + C_{23}^{23} \ (1)$$

Áp dụng công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$, ta có:

$$C_{23}^0 = C_{23}^{23}; C_{23}^1 = C_{23}^{22}; ...; C_{23}^{11} = C_{23}^{12}.$$

Vì thế: $C_{23}^0 + C_{23}^1 + C_{23}^2 + ... + C_{23}^{23} = 2\left(C_{23}^{12} + C_{23}^{13} + ... + C_{23}^{23}\right)$ (2)

Xét $f(x) = (1+x)^{23} = C_{23}^0 + C_{23}^1 x + ... + C_{23}^{23} x^{23} \Rightarrow f(1) = 2^{23}$

Từ đó thay vào (2) ta có:

$$2^{23} = 2\left(C_{13}^{12} + C_{13}^{11} + ... + C_{13}^{23}\right) \Rightarrow C_{13}^{12} + ... + C_{13}^{23} = 2^{22} = \left(2^{11}\right)^2 \Rightarrow \text{đpcm}.$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1:

Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức: $\left(x\sqrt[3]{x}+x^{-\frac{28}{25}}\right)^{12}$.

Đáp số: 729.

Bài 2:

Biết rằng tổng tất cả các hệ số của khai triển nhị thức $(x^2+1)^n$ bằng 1024. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{12} trong khai triển trên

Đáp số: 210.

Bài 3:

Gọi $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ là hệ số trong khai triển

$$(x+1)^{10}(x+2)=x^{11}+a_1x^{10}+a_2x^9+\ldots+a_{10}x+a_{11}.$$

Tìm hệ số của a_5.

Đáp số: 672.

Bài 4:

Giả sử $(1+x+x^2+x^3)^5$ có khai triển thành đa thức: $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{15}x^{15}$.

Tính $a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots-a_{15}$.

Đáp số: 0.

Bài 5: Trong khai triển $\left(\sqrt{3}-\sqrt[4]{5}\right)^{124}$ có bao nhiêu số hạng là số nguyên?

Đáp số: 32.

Bài 6:

Tìm hệ số của x^7 trong khai triển thành đa thức của $(2-3x)^{2n}$, biết

$$C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}+\ldots+C_{2n+1}^{2n+1}=1024.$$

Đáp số: $-C_{10}^{7}.2^3.3^7$.

Bài 7:

Chứng minh rằng:

$$100C_{100}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{99}-101C_{100}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}+\ldots-199C_{100}^{99}\left(\frac{1}{2}\right)^{198}+200C_{100}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^{199}=0.$$

Hướng dẫn: Áp dụng khai triển nhị thức Newton với $(x^2+x)^{100}$.

Bài 8: Tìm số hạng lớn nhất trong khai triển $(1+0{,}2)^{1000}$.

Đáp số: $C_{1000}^{166}5^{-166}$.

Bài 9:

Tổng các hệ số của khai triển $\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^n$ là 1024. Tìm hệ số của x^6 trong khai triển đó.

Đáp số: 210.

Bài 10:

Tìm hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{15}$.

Đáp số: 1365.

Bài 11:
Xét khai triển:

$$\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\sqrt[3]{2}\right)^k\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{n-k}.$$

Biết rằng tỉ số của số hạng thứ 7 kể từ số hạng đầu, với số hạng thứ 7 tính từ dưới lên bằng 6. Tìm n.
Đáp số: 9.

Bài 12:
Cho n là số nguyên dương. Chứng minh

$$1+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

Hướng dẫn: Tính $\int_0^1 f(x)$ theo hai cách ở đây $f(x) = (1 + x)^n$.

Bài 13:

1/ Tính tích phân $\int_0^1 x(1-x)^n\,dx$.

2/ Chứng minh: $\frac{1}{2}C_n^0-\frac{1}{4}C_n^1+\frac{1}{6}C_n^2-\frac{1}{8}C_n^3+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+2}C_n^n=\frac{1}{2n+2}$.

Bài 14:
Cho n là số nguyên dương. Chứng minh

1/ $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+(n-1)C_n^{n-1}+nC_n^n=n.2^{n-1}$.

2/ $2.1C_n^2+3.2C_n^3+4.3C_n^4+\ldots+n(n-1)C_n^n=n(n-1)2^{n-2}$.

Hướng dẫn:

1/ Tính $f'(x)$ theo hai cách với $f(x) = (1 + x)^n$.

2/ Tính $f''(x)$ theo hai cách với $f(x) = (1 + x)^n$.